EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN
WISKUNDELERAREN, VAN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

44e JAARGANG 1968/1969

VI — 1 MAART 1969

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men hèt abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan G. Krooshof te Groningen.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

JOHAN H. WANSINK
75 JAAR

Op 28 maart 1969 wordt Dr. Joh. H. Wansink 75 jaar. In dit tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde mogen we niet nalaten aandacht aan dit feit te schenken.

Wansink is voor de Nederlandse schoolwiskunde een begrip geworden. Iemand merkte onlangs op: „Als er iets op het gebied van de didactiek van de wiskunde gebeurt, dan is Wansink erbij". Inderdaad of het nu een conferentie is van de wiskundewerkgroep, een bijzondere of algemene vergadering van Wimecos, een vakantiecursus voor leraren van het M.C., een colloquium of congres (in Utrecht, Edinburgh of Moskou) Wansink was en is erbij. En telkens mogen we weer constateren dat hij niet alleen aanwezig is, maar ook actief aan de discussies bijdraagt.

Het is niet onze bedoeling een compleet overzicht te geven van al het werk door Wansink verricht. We denken aan zijn bijdragen in *Euclides* (al in de tiende jaargang vinden we ze), zijn voordrachten voor de tweejaarlijkse congressen van de gezamenlijke verenigingen, zijn medewerking aan de rapporten van de I.C.M.I., zijn boeken. Van 1948 tot 1961 was hij bestuurslid van Wimecos, vele jaren redacteur van Euclides, lid en secretaris van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en verder lid van allerlei commissies. Zijn invloed op de vernieuwing van de leerplannen was groot.

Iets uitvoeriger willen we ingaan op zijn boeken.

Hij schreef een veel gebruikt mechanicaboek en een *Reken- en Stelkunde* later vervangen door *Algebra*). Schogt schreef daarover: „boeken van een allure als deze Reken- en Stelkunde verschijnen niet dikwijls." Terecht, want ze gaven een nieuwe aanpak, die meer dan een beetje moed vereiste van de leraar om er mee te beginnen. Maar de opgebrachte moeite werd in ruime mate beloond: het was prettig werken met „Wansink". Bekend was ook zijn Beschrijvende *Meetkunde* (met van der Neut en Holwerda). Wansink hield van het vak BM en hij verdedigde het vurig tegen voorstanders van afschaffing van dit vak, maar later toen hij de onontkoombaarheid daarvan inzag liet hij het, inderdaad ook weer van harte, vallen.

Waar hij echter ons allen het meest mee verblijd heeft en waar voor de Nederlandse wiskundeleraar hem dankbaar moet zijn is zijn *Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren.*

Reeds vóór de oorlog gaf Wansink te kennen dat er een boek over de didactiek en methodiek van de wiskunde zou moeten komen; hij heeft toen getracht het bestuur van Wimecos voor dat plan warm te maken (in de vergadering van december 1937). Dat bestuur zag geen praktische oplossing; Wansink liet toen weten dat de taak aan één persoon moest worden toevertrouwd, die zich echter van de medewerking van anderen zou moeten verzekeren. Hij gaf een opsomming van onderwerpen, die behandeld zouden moeten worden en een lijstje van namen van hen die uitgenodigd zouden kunnen worden om een deel te schrijven. Wansink was zich echter bewust van de moeilijkheden die overwonnen moesten worden om zijn idee uit te werken.

Het kwam ook niet zover. Het plan liet hem echter niet los. In augustus 1950 tijdens de conferentie te Baarn, waar buitenlanders over het wiskundeonderwijs in hun land spraken, nam Wansink de Nederlandse bijdrage voor zijn rekening. Hij zei daar dat de Nederlandse leraar meer ,,education-minded" moest zijn en dat het in dit verband karakteristiek was dat er geen didactisch handboek in onze taal bestond als ,,Lietzmann" en ,,Butler and Wren".

Het boek is er gekomen. Hij heeft het eenvoudig zelf moeten schrijven. In het voorwoord lezen we dat het een eerste confrontatie is met didactische problemen en dat het niet bedoeld is als systematisch leerboek. Het geeft een schat van gegevens, ook voor de geroutineerde leraar. Met grote belangstelling zien we uit naar het derde deel, dat de wiskunde van de hogere klassen zal behandelen Het zal, zo hopen we, niet te lang meer op zich laten wachten.

Namens alle wiskundeleraren van Nederland feliciteren we hem van harte bij zijn vijfenzeventigste verjaardag. We wensen hem toe dat het hem gegeven mag zijn ons lang, zeer lang, van zijn ervaring, kennis en inzicht in het wiskundeonderwijs te laten profiteren. Dat klinkt wel egoïstisch, maar we menen, dat hij het zelf niet anders zal willen!

A. M. Koldijk — G. Krooshof

SOME PROBLEMS IN DISTANCE GEOMETRY [1])

by

Prof. Dr. A. F. Monna

Utrecht

A metric space is a set S together with a metric ρ, that is a mapping $S \times S \to R_+$ such that

$$\begin{aligned}
&\rho(x, y) \geqq 0 \\
&\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\
&\rho(x, y) = \rho(y, x) \\
&\rho(x, y) \leqq \rho(x, z) + \rho(y, z). \qquad (1)
\end{aligned}$$

In distance geometry one studies essentially the metrical properties of such a space. In this article I consider a class of problems which can best be illustrated by some examples.

(i) Consider a set S and a distance on S defined by

$$\begin{aligned}
&\rho(x, y) = 1 \text{ if } x \neq y, \\
&\rho(x, x) = 0.
\end{aligned}$$

This is evidently a distance. The space is discrete and in general it cannot be imbedded in a euclidean space. As an example one gets the finite geometry, consisting of 4 points in R^3 with mutual distance 1 (tetrahedron). It is essential to remark that all triangles in such a space are equilateral.

(ii) In a more general way there are spaces in which all triangles are congruent. An example is again a finite geometry of 4 points, imbedded in R^3, forming a tetrahedon constructed in an appropriate way. But one wants more and less trivial examples.

(iii) A triangle whose length of the sides are 1, 1, 2 satisfies the triangle inequality and more specially $\rho(x, y) = \rho(x, z) + \rho(y, z)$ in a suitable order of the points. Such a triangle can only be imbedded in an R^2 in such a way that the points are on a straight line. If one does not want such a degenerate triangle, it is impossible to imbed it in a euclidean space; but this does not matter in distance geometry. One wants more examples of spaces in which for all

[1]) De bedoeling van de schrijver is niet alleen de lezers van Euclides een aantrekkelijk stuk wiskunde voor te zetten, maar vooral die lezers, die graag zelf eens een onderzoek op touw zetten daartoe te stimuleren. (red.)

triangles in a suitable order equality holds in (1).

(iv) There are metric spaces in which all triangles are isoceles and moreover satisfy $d_1 \leqq d_2 = d_3$, where d_1, d_2, d_3 are the lengths of the sides, taken in the suitable order. There is again an example of a space consiting of 4 points; see the figure. All triangles are of the type (1, 2, 2). It cannot be congruently imbedded in a euclidean R^2.

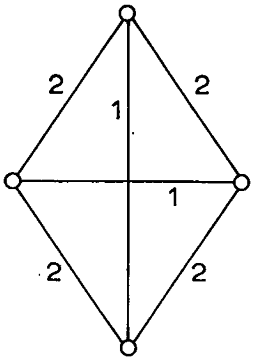


Fig. 1.

In this case the triangle inequality takes the stronger form.

$$\rho(x, y) \leqq \max(\rho(x, z), \rho(y, z)). \tag{2}$$

There are more, and important, examples of such spaces which are by no means trivial.

The following general problem can now be formulated:
describe the geometries in which all triangles are of a certain metric type.

In this article I consider essentially the metrical properties, resulting from the strong form (2). Some authors studied mainly the topological consequences of this sharper form ([2], [3]), but, as far as I know, a systematic study of the metrical properties, that are those properties which are invariant under congruencies, of this sharp triangle inequality is not available.

Blumenthal [1] does not mention this case. However, I find occasion to place the problem in a more general framework, which is illustrated by the foregoing examples.

§1. Let S be a metrical space with distance ρ.

Definition. A triple (triangle) $x, y, z \in S$ is called non-archimedean (n.a.) if

$$\rho(x, y) \leqq \max(\rho(x, z), \rho(y, z)), \tag{3a}$$
$$\rho(y, z) \leqq \max(\rho(x, y), \rho(x, z)), \tag{3b}$$
$$\rho(x, z) \leqq \max(\rho(x, y), \rho(y, z)). \tag{3c}$$

Denoting by d_1, d_2, d_3 the mutual distances of the points x, y, z of the triple (i.e. the length of the sides) and supposing $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$, it is easily seen that the triple x, y, z is n.a. if and only if $d_1 \leqq d_2 = d_3$. Only triples (x, y, z) such that x, y, z are different points are interesting. So we restrict ourselves to these proper triples. Note that (2) is the sharpest form of the triangle inequality in the sense that in at most one of the inequalities (3a), (3b), (3c) $\leqq$ may be replaced by $<$.
On the other hand the less sharpest form of (1) is that in which equality holds. Note that this can only be true for at most one of the three inequalities.
The name n.a. is motivated by the analogy of (2) with non-archimedean valuations in valuation theory.

Definition. The space S *is called n.a. if all triples in* S *are n.a.*

The space S in example (i) in the introduction is n.a. There exist spaces of dimension 1 on which a metric can be defined in which there are no n.a. triples. For example the real numbers (straight line) with the ordinary metric (absolute value)

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

However, a new metric ρ' can be defined on the real number line (which is moreover topologically equivalent with ρ) such that in the new metric there are n.a. triples, namely

$$\begin{aligned} \rho'(x, y) &= |x - y| \text{ if } |x - y| \leqq 1, \\ \rho'(x, y) &= 1 \qquad\quad \text{if } |x - y| > 1. \end{aligned}$$

In ρ' not every triple is n.a.

Spaces which are n.a. are important for non-archimedean analysis, i.e. analysis over non-archimedean valued fields. At the end of this article I give some more examples and some more general information.

In studying n.a. triples in a metric space the following problems rise:

A. The problem of the existence of n.a. triples in a metric space S.
B. The problem of the distribution of n.a. triples in a metric S when they exist.

§ 2. Let S be a metric space. In studying triples in S, one is at first inclined to consider the product space S^3, whose elements are the ordered triples (x, y, z), thus having a mapping from the set of all triples onto S^3. However, F. van der Blij, to whom I owe some

more useful remarks, informed me that this seems not to be the right way to study these metrical problems and that another method is preferable. Indeed, not the points x, y, z of the triple are important, but the mutual distances d_1, d_2, d_3.
Moreover, similar triangles, that is triangles with sides d_1, d_2, d_3 and $\lambda d_1, \lambda d_2, \lambda d_3$ for any $\lambda > 0$, must not be considered as different; they belong to the same class. This leads to consider a mapping from the set of all classes of similar triangles into a projective plane P_2.
Consider triangular coordinates in P_2. Let D_1, D_2, D_3, E be the points with coordinates respectively $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$. Let A, B, C be the points with coordinates respectively $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$. Let Δ be the convex hull of the set consisting of the points A, B, C (that is the triangle ABC).

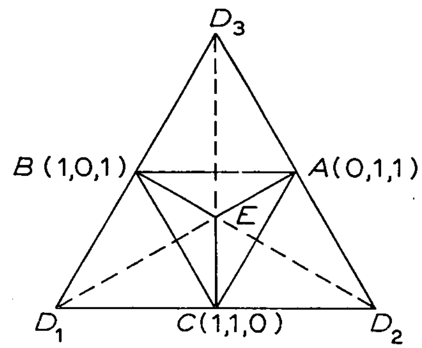


Fig. 2.

Consider now triples (triangles) with the general triangle inequality (1). It follows from projective geometry that to every point of Δ corresponds a class of similar triangles and conversely every class of similar triangles is mapped on a point of Δ. We have thus a mapping T from the classes of similar triangles in the set Δ. This mapping is injective. Note that the points A, B, C correspond to triples for which two points coincide.
Now, let S be a metric space. *The general problem is then to study the image* $I_S \subset \Delta$ *of the mapping* T.
In a more exact formulation:

Characterize the subsets Γ *of* Δ *for which there is a space* S *such that* $I_S = \Gamma$.

We give some examples and problems.

(i) Suppose S contains equilateral triangles. All these triangles (which are all similar) are mapped on the point E (1, 1, 1). Blumenthal [1], p. 47, gives the following theorem:

,,If a metric space S contains a subset L congruent to a straight line E_1, and a point p not belonging to L, then S contains an equilateral triple''.

For such a space $E \in I_S$.

There exist metric spaces in which *all* triples are equilateral. For instance a space consisting of 4 points of mutual distance 1 (tetrahedron). This can be generalized for discrete spaces; there rise then problems of the dimension and imbedding problems. Such a space is mapped on the single point E.

However, there exist metrical spaces containing no equilateral triples (see an example in Blumenthal, p. 47). For such a space $E \notin I_S$.

(ii) Let α be the union of the segments AB, BC, AC. Then one easily verifies that the image of any class of similar triples for which equality holds in (1) is a point of α. There are trivial examples of spaces containing such triples, for instance the space R^1 with the ordinary metric or 3-point spaces. There are however less trivial examples.

Example. Let R^2 be the linear space of all couples of real numbers; consider on R^2 the metric defined by

$$\rho(x, y) = ||x - y||, \; x, y \in R^2,$$
$$||x|| = \max(|x_1|, |x_2|), \; x = (x_1, x_2).$$

Take $x = (-1, 0)$, $y = (+1, 0)$, $z = (0, z_2)$ where $|z_2| \leqq 1$. Then

$$\rho(x, z) = \rho(y, z) = 1, \rho(x, y) = 2$$

Then (x, y, z) is the desired triple.

Note that all the points z are ,,between'' x and y in the sense of the definition of Blumenthal [1].

In this respect it is also interesting to study metrics of the form

$$\rho = \max(\rho_1, \rho_2),$$

where

$$\rho_1(x, y) = C \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|),$$
$$\rho_2(x, y) = \{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

for different values of the constant $C > 0$.

(iii) Let β be the union of the segments EA, EB, EC. The image of any class of similar n.a. triples is a point of β. So we have:

If S *is n.a. then* $I_S \subset \beta$.

Remark. In a n. a. space there are no triples such that one of the points is between the others as defined by Blumenthal. This implies that there are no convex sets in such a space according to Blumenthal's definition. Compare a definition of convexity in linear spaces over a non-archimedean valued field, proceeding along quite a different way [4].

(iv) *Problems* 1. *Are there n.a. metric spaces for which* $I_S = \beta$ *(with the exception of the points A, B, C if only proper triples are considered)?*

2. *Determine, up to congruence, the classes of metric spaces* S *for which* $I_S = \Delta$ *(with the exeption eventually of A, B, C).*

Remark that in this way the original questions concerning n.a. triples are placed in a more general framework.

With regard to the second problem we remark that a euclidean space is an example of such a space (construction of a triangle with given sides satisfying (1)). Compare also spherical geometry.

§ 3. It is of course not difficult to formulate more problems like the two above. For a more systematic study one can proceed in the following way.

For every triple we want to have a measure for the deviation of the triple from being n.a. That is to say we want to have a real function φ, defined on the set of all possible triples with suitable properties. *Call such a function an excess-function.* It is reasonable to put the following conditions on an excess-function.

1. $\varphi(\xi) \geq 0$ for all triples ξ.
2. $\varphi(\xi) = 0$ if and only if ξ is n.a.
3. If the set of the triples for which φ attains its upper bound (possibly $+\infty$) is not empty, it consists only of triples for which in (1) holds the equality (for a suitable order of x, y, z,). Conversely φ attains its maximum for every such triple.
4. If ξ_1 and ξ_2 are similar

$$\varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2).$$

Taking into account the mapping T, previously defined, φ becomes a real function defined on the set Δ [1]). With the aid of an excess function, one can analyse the image $I_S \subset \Delta$. It is not to be expected that an excess-function is uniquely determined by these conditions. So we have the problem: *What is a good excess-function?*

---

[1]) Evidently φ can also be considered as a function defined on the product space S^3.

Examples. (i) Let ξ be a triple with mutual distances d_1, d_2, d_3. Suppose $d_1 \geqq d_2 \geqq d_3$. Define

$$\varphi(\xi) = \left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right)\left(1 - \frac{d_3}{d_1}\right). \tag{4}$$

Evidently this φ satisfies the conditions 1, 2, 4. We have $0 \leqq \varphi(\xi) \leqq \frac{1}{4}$. Indeed, let $d_2 = \varepsilon d_1$, $d_3 = \eta d_1$. Then $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$ and $\varepsilon + \eta \geqq 1$. Suppose now $(1 - \varepsilon)(1 - \eta) > \frac{1}{4}$.

Let $\varepsilon = \frac{1}{2} - \alpha$, $\eta = \frac{1}{2} + \beta$; then $\beta = \alpha + \delta \geqq \alpha$ and $\alpha + \frac{1}{2} \geqq 0$. We have then $(\frac{1}{2} + \alpha)(\frac{1}{2} - \alpha - \delta) > \frac{1}{4}$, which leads to a contradiction Thus $0 \leqq \varphi(\xi) \leqq \frac{1}{4}$. It is easily seen that $\varphi(\xi) = \frac{1}{4}$ if and only if $\alpha = \beta = 0$, that is if $d_2 = \frac{1}{2}d_1$, $d_3 = \frac{1}{2}d_1$, $d_2 + d_3 = d_1$. That is: all triangles for which φ attains its maximum are of the type (2, 1, 1). There are however numerous geometries, different from this type, for which $d_1 = d_2 + d_3$. For instance spaces consisting of 3 points with suitable chosen distances (for instance the triangle 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$). For these triangles φ attains not its maximum. The conclusion is that this φ does not satisfy the third condition and that it is not a good one.

Remark that it is easily seen that spaces for which $\varphi(\xi) = \frac{1}{4}$ for all triples ξ — φ defined by (4) — can have at most 4 points; they are of the type as given in the figure. Note that such a space cannot be imbedded isometrically in a euclidean space.

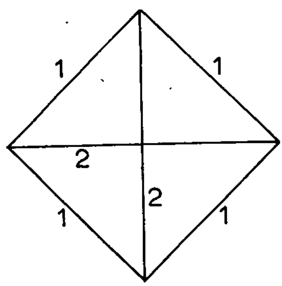


Fig. 3.

(ii) Suppose again $d_1 \geqq d_2 \geqq d_3$. Define

$$\psi(\xi) = \frac{(d_1 - d_2)(d_1 - d_3)}{(d_1 - d_2 - d_3)^2} \tag{5}$$

Evidently ψ satisfies the four conditions. The maximum of ψ is $+\infty$. If one wants to avoid the value $+\infty$, one can choose for instance

the function

$$\chi = \frac{\psi}{1+\psi}.$$

Then $0 \leqq \psi(\xi) \leqq 1$.
There is an easy geometric interpretation of ψ. The triples ξ for which $\psi(\xi) = C > 0$ correspond to the points of a part of a hyperbola, inside the triangle BEC, tangent to EB and EC.

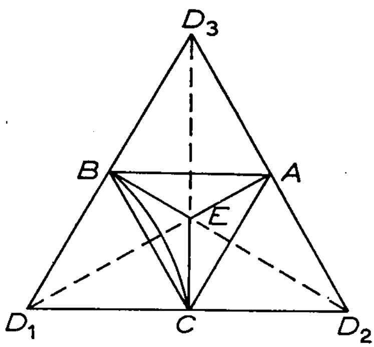


Fig. 4.

The situation is analogous in the triangles AEC and AEB; it depends on the largest side of the triple in which of these triangles the excess-function is defined.

Having defined an excess-function ψ, the problem of the existence and the distribution of n.a. triples in a given metric space S is reduced to the study of the set of the solutions of the equation $\psi(\xi) = 0$, where ξ runs over the points of Δ, corresponding to the classes of triples of S. Call this nulset NA_S; we have $NA_S \subset \beta$.
The main problem is now:

Is it possible to classify the metric spaces with respect to the distribution of the n.a. triples?

We suggest some further problems.

(i) Given any $0 \leqq C \leqq \infty$, it is of course trivial that there exist spaces such that $\psi(\xi) = C$ for all triples ξ; we have only to consider spaces consisting of three points. But a non-trivial problem is the following:

Characterize all metric spaces for which $\psi(\xi) = C$ for all triples ξ of this space.

Compare the preceding remarks for the function φ (see(4)) and $C = \frac{1}{4}$.
The same problems can be formulated changing

$$\psi(\xi) = C \text{ by } \psi(\xi) \leqq C \text{ or } \psi(\xi) \geqq C.$$

(ii) Provide the projective plane P_2 with a topology in the usual way. Then there is the following problem:

Study the topological properties of the set NA_S.

(iii) The distribution problem of n.a. triples may be seen as a problem of cardinality. However, a measure-theoretic approach seems to be more adequate.
Let μ be Lebesgue-measure in P_2. Because $NA_S \subset \beta$(the union of the segment EA, EB, EC) one has

$$\mu(NA_S) = 0.$$

But a refinement is possible.

Let μ be a measure on β, sufficiently regular in order that questions on the existence of limits don't give difficulties. Define for any $p \in \beta$.

$$\lambda(p) = \lim_{U_p} \frac{\mu(NA_S \cap U_p)}{\mu(U_p)}$$

where (U_p) is a basis of neighbourhoods of p. The function λ is a measure for the density of NA_S in β. The problem is then to study the properties of λ.

Evidently more density problems concerning the distribution of triples can be formulated.

§ 4. Many problems can be put which exceed questions of n.a. triples but which concern, in a general sense, the existence of geometries in which all triples are of a certain type.
We give some examples.

(i) *Characterize all metric spaces in which*

a) *all triples are isoceles*

or

b) *in which there are no isoceles triples.*

In these characterizations congruent spaces (see [1]) must be considered to belong to the same class.

(ii) Call a triple *Pythagorean* when

$$d_1^2 = d_2^2 + d_3^2.$$

It is easy to give an example of a metric space in which all triples are Pythagorean. For instance a space consisting of 4 points with mutual distances as in the figure. This space can be isometrically imbedded in a euclidean plane. However, one shows easily with elementary geometry that there exists no tetrahedron $ABCD$ in R^3 whose sides have lengths as in the figure (for imbedding problems see Blumenthal [1])

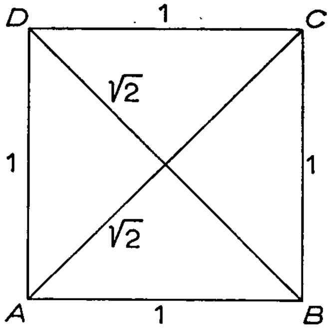


Fig. 5.

Are there metric spaces of more then 4 points in which all triples are Pythagorean?

We don't require for such a space that it is isometrically imbeddable in a euclidean space; only the axioms for a metric must be verified.

It is evident that an excess-function can be related to this problem; it can be defined by

$$d_1^2 - d_2^2 - d_3^2.$$

It is a measure for the deviation of a triple from being Pythagorean. One may then study the distribution of Pythagorean triples in a metric space. Compare a theorem of Blumenthal [1], p. 129, characterizing euclidean space by means of the existence of Pythagorean triples (using convexity in the sense of Blumenthal).

(iii) There exist metric spaces in which all triples are congruent. Example can be made with tetrahedrons. One wants more examples; in particular how is the situation in euclidean spaces with dimension > 3?

§ 5. Apart from problems concerning the distribution of certain types of triples, especially n.a. triples, there is the general problem of studying distance geometry in which the ordinary triangle inequality is replaced by the strong form. There are for instance imbedding problems and curve theory; see Blumenthal [1] and Rinow [5]. The latter is perhaps more difficult because all n.a. spaces are totally disconnected. In problems of imbedding the following space might be useful. Let K be a n.a. valued field. Consider the space K^n of all sequences $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in K$, normed by

$$||x|| = \max_{1 \leqq i \leqq n} (x_i).$$

This space can perhaps take the place of the euclidean space R^n in the classical theory.

§ 6. Finally I give some general information about n.a. triples and some more examples of less elementary character.
The following theorem is proved in [3].

Theorem. Every separable metric space of topological dimension $\geqq 2$ contains an infinite number of n.a. triples.

N.a. spaces have topological dimension 0; see [3]. Spaces of dimension 0 can be metrised in such a way that these are no n.a. triples, but also in a topologically equivalent way such that all triples are n.a. There exist non-separable metric spaces which contain n.a. triples, for instance the space 1^∞ over R.
Example. Let K be a n.a. valued field; the valuation is supposed to be non-trivial. Let 1^1 be the linear space over K of all sequences $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $x_i \in K$, such that $\sum|x_i| < \infty$, normed by

$$||x|| = \sum|x_i|.$$

It is easily verified that $||\cdot||$ is a norm but that it does not satisfy the strong inequality $||x + y|| \leqq \max (||x||, ||y||)$. Thus, in the metric corresponding to this norm, 1^1 contains triples which are not n.a.; the field K, however, is n.a. and so every linear subspace, generated by a point $x \neq 0$ (a straight line) is n.a.
The space K^n of all sequences $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in K$, normed by

$$||x|| = \max_i |x_i|$$

is n.a.
Example. Let K be a n.a. valued field as before.
Consider normed linear spaces S over K; $\rho(x, y) = ||x - y||$. One

sees easily that the supposition that

$$||x + y|| \leqq \max (||x||, ||y||)$$

should be never true unless $x = y = 0$, leads to a contradiction. There are then two possibilities:

(i) for all $x, y \in S$ is $||x + y|| \leqq \max (||x||, ||y||)$,
In this case all triples are n.a.

(ii) there exist $x, y \in S$ such that

$$\max (||x||, ||y||) < ||x + y|| \leqq ||x|| + ||y||.$$

In this case there are n.a. triples as well as triples which are not n.a. An example of such a space is the space 1^1, considered before.
It follows from the preceding theorem that one has also the situation of case (ii) in a big class of normed spaces over R. Is it possible to distinguish between the classes of these spaces over K resp. R by means of metrical properties?

REFERENCES

1. Blumenthal, L. M., *Theory and applications of distance geometry*. Oxford 1953.
2. Groot, J. de, *Non-archimedean metrics in topology*. Proc. Am. Math. Soc. 7, 948—953 (1956).
3. Monna, A. F., *Remarques sur les métriques non-archimédiennes* I, II. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., 53, 470—481, 625—637 (1950).
4. Monna, A. F., *Ensembles convexes dans les espaces vectoriels sur un corps valué*. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., A 61, 528—539 (1958).
5. Rinow, W., *Die innere Geometrie der metrischen Räume*. Springer Verlag 1961.

VOORSTELLEN MODERNISERING

Voorstellen tot modernisering van het wiskundeonderwijs

Nu voor onze scholen voor voortgezet onderwijs de leerplannen moeten worden vastgesteld, is het goed daarbij onder meer te letten op wat er in het buitenland gebeurt. In dit nummer schenken we daarom aandacht aan de op 3 oktober 1968 vastgestelde

EMPFEHLUNGEN UND RICHTLINIEN ZUR MODERNISIERUNG DES MATHEMATIKUNTERRICHTS AN DEN ALLGEMEINBILDENDEN SCHULEN

voor de Bondsrepubliek Duitsland.

De Richtlinien worden voorafgegaan door een aantal overwegingen, die we hieronder kort samenvatten.

De veranderingen in het wiskundige denken, de andere plaats die de wiskunde in de maatschappij gekregen heeft, de kloof tussen voortgezet en universitair onderwijs en de sterk toenemende behoefte aan wis- en natuurkundig geschoolden worden als argumenten genoemd voor een modernisering van het wiskundeonderwijs.

Er wordt gewezen op de dragende grondbegrippen, zoals verzameling, afbeelding, structuur (groep, ring, lichaam, vectorruimte) die gedurende het gehele wiskundeonderwijs *te beginnen in klasse* 1 *van de lagere school* ontwikkeld moeten worden.

Meer dan vroeger moet de nadruk komen te liggen op de ontwikkeling van het zelfstandige wiskundige denken.

Er moet een nieuwe didaktiek en methodiek komen. Deze kunnen vooral in die gebieden, die het minst gewijzigd zijn, voorzichtig opgebouwd worden.

In de lagere klassen moet heel-aanschouwelijk-ordenend naar de grondbegrippen toe gewerkt worden. In de hogere klassen kan een verdieping door verdergaande abstrahering en systematisering plaatsvinden.

Aanbevolen wordt een handboek voor de leraar samen te stellen. Ook wordt gesproken over de noodzaak van vernieuwing van de leraarsopleiding en van herscholingscursussen.

Belangrijk is dat het leerplan voor de basisschool verplicht wordt in het schooljaar 1972–73. Zou men dat in Nederland ook willen bereiken dan zou men nu al moeten beginnen aan de herscholing van de onderwijzers en onderwijzeressen.

Richtlinien und Rahmenpläne für den Mathematikunterricht

Vorwort

Die Richtlinien geben ein Rahmenprogramm. Sie sind der Versuch, den Mathematikunterricht an den allgemeinbildenden Schulen auf eine zeitgemäße Grundlage zu stellen. Sie beachten die geforderte Durchlässigkeit zwischen den einzelnen Schulgattungen und berücksichtigen die differenzierten und unterschiedlichen Schulabschlüsse.
Die Richtlinien umfassen die Klassen 1 bis 13. Methode und Intensität der Behandlung der Themen müssen sich nach den Bildungszielen der jeweiligen Schulformen richten. Nicht für alle Schulformen verbindliche Themen sind besonders gekennzeichnet.
Die für die Klassen 1 bis 6 aufgezeichneten Themenkreise müssen in allen Schulformen bis zum Ende der Klasse 6 behandelt worden sein. Sie sind so gegliedert, daß das Lernziel der Klasse 4 erkennbar ist.
Für die Abschlußklasse der Hauptschule werden vorerst keine Themenkreise angegeben.
Der Mathematikunterricht ist in allen Klassenstufen nach den vorgegebenen Möglichkeiten auf die neuen Richtlinien umzustellen. Für den Unterricht in der Grundschule ist der Unterricht nach diesen Richtlinien spätestens mit Schuljahresbeginn 1972/73 verbindlich.
Mit der Reihenfolge der Themenkreise innerhalb der drei Stufen der Klassen 1 bis 6, 7 bis 10 und 11 bis 13 wird keine methodische Vorschrift gegeben; auch bedeutet die Einteilung in eine linke und rechte Spalte keine Unterscheidung zwischen einem Minimalplan und fakultativen Unterrichtsthemen.
Die Unterrichtsfolge wird von den vorgegebenen Möglichkeiten, aber auch von methodisch-didaktischen Grundvorstellungen bestimmt sein müssen. Es muß unter allen Umständen vermieden werden, allzu früh in einen mathematischen Formalismus zu verfallen, vielmehr sind tragende Grundbegriffe und die damit verbundenen Schreib- und Denkweisen anschaulich an den Inhalten zu entwickeln.

Klassen 1 bis 6

Die Themenkreise für die Klassen 1 bis 6 bilden didaktisch eine Einheit. Der 1. Themenkreis ist insoweit allen anderen übergeordnet, als er die gemeinsamen Grundlagen zum Inhalt hat. Die dort genannten Begriffe und die damit verbundenen Betrachtungsweisen müssen immer wieder verwendet und vertieft werden. In den Themenkreisen 2 bis 4 sind die Lernziele bis zum Ende der Klasse 4 kenntlich gemacht; die Themen werden in den folgenden Klassen weitergeführt.

1. *Themenkreis: Mengen und ihre Verknüpfungen*

Eigenschaften von Gegenständen, Menge, Element ($\in$)	Der Mengenbegriff ist grundlegend für alle Themenkreise und wird im Zusammenhang mit ihnen erarbeitet.
Mengenbild und Mengenschreibweise Grundmenge, Teilmenge ($\subset$) Die Verknüpfungen Durchschnitt ($\cap$), Vereinigung ($\cup$), Ergänzung von Mengen	Die Sachverhalte werden in kindgemäßer Weise experimentell erarbeitet, die Erfahrungen durch unvollständige Induktion gewonnen.

Eigenschaften der Verknüpfungen
Gebrauch von Platzhaltern (Variable)

2. Themenkreis: Menge der natürlichen Zahlen und ihre Verknüpfungen

Natürliche Zahl als Kardinalzahl Die Zahl Null Ziffer Veranschaulichung der Zahl	Ziffern sind Zeichen für Zahlen. Der Unterscheidung von Zeichen und Bezeichnetem dient auch der 5. Themenkreis
Die Grundverknüpfungen Addition und Multiplikation und ihre Umkehrungen	Zusammenhang mit dem 4. Themenkreis Sprechweise: plus, minus, mal, durch
Eigenschaften dieser Verknüpfungen Term Richtige Verwendung des Gleichheitszeichens	Rechenverfahren im Zusammenhang mit dem 5. Themenkreis. Sicherheit und Gewandtheit im mündlichen und schriftlichen Rechnen. Gebrauch von Klammern
Ordnung der natürlichen Zahlen (<, >) Einfache Gleichungen und Ungleichungen ohne Umformungen Natürliche Zahlen bis 1 000 000	Wahre und falsche Aussagen Lösungsmenge

Behandlung obiger Themen des 2. Themenkreises bis zum Ende der Klasse 4

3. Themenkreis: Größen

Einfache Größen: Währung, Maße, Länge, Zeit	Maßzahl und Maßeinheit
Rechnen mit Größen	Erfassen einfacher Zusammenhänge in der Umwelt mit Hilfe mathematischer Begriffe und Verfahren Übung im Sachrechnen

Behandlung obiger Themen des 3. Themenkreises bis zum Ende der Klasse 4

Zusammengesetzte Größen: Flächeninhalt von Quadrat und Rechteck, Rauminhalt von Würfel und Quader

4. Themenkreis: Geometrische Grundbegriffe

Geometrische Grundvorstellungen: Würfel und Quadrat, Quader und Rechteck, Kugel und Kreis	Erfassen, Darstellen und Benennen dieser geometrischen Figuren

Behandlung obiger Themen des 4. Themenkreises bis zum Ende der Klasse 4

Punkt, Strecke, Strahl, Gerade, Parallele, Winkel, Dreieck, Viereck, Zylinder, Pyramide, Kegel	
Schieben, Drehen, Spiegeln und das Verknüpfen dieser Abbildungen im Zusammenhang mit Dreieck, Viereck und Kreis, Würfel, Quader, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel	In exemplarischer Behandlung an konkreten Gegenständen

5. Themenkreis: Ziffern und Stellenwertsysteme

Stellenwertsystem	Als Beispiel für ein Ziffernsystem ohne Stellenwerte kann das römische dienen
Potenzen Basisschreibweise, insbesondere Dezimal— und Dualsystem	Sprechweise: Die Grundzahl, nach deren Potenzen die Stellen geordnet sind, heißt Basis des Stellenwertsystems Aufbau der Stellenwertsysteme im Zusammenhang mit dem 3. Themenkreis Vergleichen verschiedener Stellenwertsysteme
Beispiele zum Rechnen im Dualsystem	Der Aufbau der Stellenwertsysteme und die Eigenschaften der Zahlverknüpfungen sind voneinander abzuheben

6. Themenkreis: Teilbarkeit und Teilermengen

Teilbarkeit, Teilbarkeitsregeln Primzahl Zerlegung in Primfaktoren	Die Teilbarkeit ist eine Zahleigenschaft. Gewisse Teilbarkeitsregeln sind Eigenschaften von Stellenwertsystemen.
Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches	Zusammenhang mit Durchschnitt und Vereinigung von Mengen

7. Themenkreis: Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen und ihre Verknüpfungen

Gemeiner Bruch Gleichheit von Bruchzahlen Verknüpfungen von Brüchen Eigenschaften der Verknüpfungen Systembruch, insbesondere Dezimal- und Dualbruch Rechnen mit Dezimalbrüchen Zusammenhang zwischen gemeinem Bruch und Dezimalbruch Bruchzahl (positive rationale Zahl) Ordnung der Bruchzahlen Zuordnung zu Punkten der Halbgeraden Einfache Gleichungen und Ungleichungen	Gemeiner Bruch (mit Bruchstrich) und Systembruch (in einem Stellenwertsystem mit Komma) als Zeichen für Bruchzahlen Fertigkeit im Erweitern und Kürzen Übung im Bruchrechnen Zusammenhang mit dem 3. Themenkreis Runden, Näherungsverfahren, Näherungswerte Die Menge der natürlichen Zahlen wird in die Menge der rationalen Zahlen eingebettet

Klassen 7 bis 10

Der Einschnitt nach der Klasse 8 ist als Anhaltspunkt für die Stoffverteilung und nicht als strenge Trennung in der Behandlung der Themen anzusehen.
Die in den Themenkreisen aufgeführten Strukturbegriffe sollen jeweils an Hand von ausreichend vielen Modellen erarbeitet werden.

Klassen 7 und 8

Bemerkung: Die mit einem Stern (*) versehenen Themen sind für die Haupt- und Realschule, die mit zwei Sternen (**) versehenen Themen sind für die Hauptschule nicht verbindlich.

1. *Themenkreis: Zuordnung von Mengen*

Die Funktion als Abbildung und als Paarmenge

Die Funktionen
$x \rightarrow ax$ bzw. $\{(x;y) \mid y = ax\}$
$x \rightarrow \frac{b}{x}$ bzw. $\left\{(x;y) \mid y = \frac{b}{x}\right\}$
und ihre Graphen

Gebrauch des Rechenstabes

Die Gleichheitsrelation
Die Ordnungsrelation

Rechnen mit quotientengleichen und produktgleichen Größenpaaren

Zusammengesetzte Größen

Als Anwendung Prozent- und Zinsrechnung

Aufstellen von Tabellen, Multiplizieren, Dividieren

Beispiel: a kommt vor b

2. *Themenkreis: Kongruenzabbildungen*

Achsenspiegelung
Punktspiegelung
Schiebung
Drehung
** Verknüpfung von Kongruenzabbildungen
Dreieckslehre
Viereckslehre
Exemplarische Behandlung des Zusammenhangs zwischen einem Lehrsatz und seinen Voraussetzungen (Lokales Ordnen)

Grundkonstruktionen als Anwendung
Einfache symmetrische Figuren
** Die Schiebung gestattet die Einführung des Vektorbegriffes und der Vektoraddition
** Gruppeneigenschaften
** Einfache endliche Gruppen, Permutationen
** Kongruenzsätze
Einfache Dreieckskonstruktionen
** Definition. Nicht umkehrbare und umkehrbare Sätze. Notwendige und hinreichende Bedingung.

3. *Themenkreis: Geometrische Größen*

Winkel und Winkelmaß
Winkelsätze
Abbildung durch Scherung
Rauminhalt des senkrechten Prismas

Die Frage der Orientierung ist zu beachten.
Flächeninhalt des Parallelogramms und des Dreiecks

4. *Themenkreis: Algebraische Aussageformen*

** Aussage und Aussageform
** Verknüpfung von Aussageformen
Termumformungen
** Äquivalenzumformungen von Aussageformen
** Lineare Ungleichungen mit einer Variablen
Lineare Gleichungen mit einer Variablen
** Die lineare Funktion $x \rightarrow ax + b$ und ihr Graph
** Lineare Gleichungen und Ungleichungen mit 2 Variablen

** Die Verknüpfungen „und" ($\wedge$) und „oder" ($\vee$). Zusammenhang mit Durchschnitt und Vereinigung.
Grundmenge und Definitionsbereich
** Zusammenhang zwischen Grundmenge und Lösungsmenge
** Graphische Darstellung im kartesischen Koordinatensystem.
Als Anwendung eignet sich das lineare Optimieren.

5. *Themenkreis: Algebraische Strukturen*

* Die Gruppe	* Abstraktion aus bekannten Modellen der Geometrie und Arithmetik
** Der Ring der ganzen Zahlen	** Einführung der negativen Zahlen
** Der Körper der rationalen Zahlen	** Sicherheit im Rechnen mit rationalen Zahlen
* Der angeordnete Körper der rationalen Zahlen	

Klassen 9 und 10

Bemerkung: Die mit einem Stern (*) versehenen Themen sind für die Realschule nicht verbindlich. Die folgenden Themen beziehen sich nicht auf die Hauptschule.

1. *Themenkreis: Reelle Zahlen*

Die Funktion $x \rightarrow ax^2 + bx + c$ und ihr Graph	Der Graph kann aus dem Graph von $x \rightarrow x^2$ durch Schiebung, Spiegelung und Streckung erzeugt werden.
Die Umkehrfunktion $x \rightarrow \sqrt{x}$ von $x \rightarrow x^2$ für $x \geqq 0$	Wurzeln werden nur für nichtnegative Radikanden erklärt und sind nichtnegativ.
Die quadratische Gleichung	Nur reelle Lösungen Rechnerische und zeichnerische Lösungsverfahren, Näherungsverfahren
Zerlegung in Linearfaktoren	Satz von Vieta
Reelle Zahlen	Die reellen Zahlen können mit Hilfe von rationalen Intervallschachtelungen erklärt werden.

2. *Themenkreis: Ähnlichkeitsabbildungen*

Zentrische Streckung

* Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl	Enge Verflechtung von Geometrie und Algebra
* Gruppen von Ähnlichkeitsabbildungen	
Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck und am Kreis	

3. *Themenkreis: Potenzen und zugehörige Funktionen*

Potenzen mit rationalen Exponenten Strukturerhaltende Abbildung $x \rightarrow a^x$

Potenzfunktion Exponentialfunktion Logarithmusfunktion	Potenzrechnung Für nichtganze Exponenten werden keine negativen Basen zugelassen.
Darstellung von Funktionen durch Doppelskalen (Rechenstab) und Tabellen.	Sicherheit im Umgang mit Rechenstab und Tabellen

4. *Themenkreis: Flächen- und Rauminhalt, Darstellung von Körpern*

Flächeninhalt und Umfang des Kreises, Kreisteile Oberflächen- und Rauminhalt von Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel

Senkrecht und schräge Parallelprojektion

Vorbereitung des Grenzwertbegriffes

Darstellung einiger einfacher Körper

5. *Themenkreis: Ebene Trigonometrie*

Die trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens

Dreiecksberechnungen

* Skalarprodukt

Verwendung des Rechenstabes

Klassen 11 bis 13

Die in den Themenkreisen 1 und 2 festgelegten Stoffgebiete sind für alle gymnasialen Schultypen verbindlich. Umfang und Schwierigkeitsgrad richten sich nach den für die einzelnen Typen in der Oberstufe zur Verfügung stehenden Stunden. Die in dem 3. und 4. Themenkreis mit ° versehenen Themen bleiben zur Behandlung den mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasien vorbehalten; der Themenkreis 5 kann an mathematisch-naturwissenschaftlichen und an wirtschaftswissenschaftlichen Gymnasien behandelt werden. Falls an den sprachlichen Gymnasien genügend Zeit bleibt, wird die Behandlung des 1. Themas im 4. Themenkreis empfohlen.
Im Unterricht auf der gymnasialen Oberstufe sollen moderne Grundbegriffe wie die der Mengenalgebra, der Aussagenlogik und der mathematischen Strukturen verwendet sowie verschiedene Beweisverfahren bewußtgemacht werden.
Die Anwendbarkeit der Mathematik auf Fragen der Naturwissenschaften, der Wirtschaft und der Technik ist angemessen zu berücksichtigen.

1. *Themenkreis: Analysis*

Grundeigenschaften der reellen Zahlen

Grenzwert, Stetigkeit, Stetige Funktionen

Differentialrechnung
- Differenzierbarkeit,
- Ableitung von Funktionen

Integralrechnung
- Integral, Stammfunktion, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Anwendung der Differential- und Integralrechnung

Anordnung, Vollständigkeit

Funktionen, Folgen, Umkehrfunktion, Zwischenwertsatz

Maximum, Minimum in einem angeschlossenen Intervall

Mittelwertsatz

2. *Themenkreis: Vektorraum, affiner und metrischer Raum*

Vektorraum, Punktraum

Lineare Gebilde in Ebene und Raum

Skalarprodukt

Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes in Vektordarstellung

Lineare Unabhängigkeit, Basis, Koordinaten, Modelle von Vektorräumen

3. *Themenkreis: Geometrische Abbildungen*

Kongruenzabbildung, Ähnlichkeitsabbildung Affine Abbildung	In Auswahl und in exemplarischer Behandlung unter Einbeziehung des Gruppenbegriffs
Kegelschnitte ° Projektive Abbildung	Behandlung vor allem im Hinblick auf ihre Verwandtschaft
° Beispiel einer nicht-linearen oder nicht-elemententreuen Abbildung	° Matrizen

4. *Themenkreis: Strukturen*

° a) Ringe, Körper	Beispiele für die Erweiterung eines Zahlenbereichs Ganze, rationale, reelle, komplexe Zahlen, Restklassen Die Gaußsche Ebene

Von den nachstehend genannten zwei Themen ist eines im mathematisch-naturwissenschaftlichen Typ zu behandeln:

° b) Boolescher Verband	Modelle: Mengenalgebra Aussagenalgebra, auch Schaltalgebra Ereignisalgebra
° c) Geometrien	Beispiel einer endlichen Geometrie in axiomatischer Behandlung oder einer nicht-euklidischen Geometrie

° 5. *Themenkreis: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, moderne mathematische Techniken*

BERICHTEN

Het Vijfde Nederlandse Mathematische Congres

Dit door het Wiskundig Genootschap op 10 en 11 april 1969 te Wageningen te houden congres is open voor ieder belangstellende (geen congreskosten). Een folder met inlichtingen is verkrijgbaar bij de secretaris van het congres, de heer Dr. A. C. van Eijnsbergen, Landbouwhogeschool, afd. Wiskunde, De Dreijen 8, Wageningen.

Er is o.a. een symposium gewijd aan het onderwijs in de wiskunde.

2e Seminarie te Echternach (C.I.E.M.)

Dit vindt plaats van 28 tot 31 mei 1969. Het thema is: „*De overgang van de middelbare school naar de universiteit en de studie van de wiskunde*". Geen deelnamekosten. Er zullen ongeveer 15 voordrachten gehouden worden; toegezegd hebben de professoren Ballieu, Barner, Behnke, Bréard, Delessert, Frenkel, Garnir, Kirsch, Ovaert, Papy, Pickert, Revuz, Servais, van der Blij, Wäsche.

Nadere inlichtingen bij Prof. Jos. Hallé, Lycée Classique, Echternach (Luxemburg)

OPENINGSREDE

van de voorzitter van Wimecos, de heer Dr. Ir. B. Groeneveld voor de jaarvergadering van 23 december 1968.

Dames en Heren,

Op deze algemene ledenvergadering heet ik U allen van harte welkom en in het bijzonder het erelid Dr. J. H. Wansink, de inspecteurs Dr. D. N. van der Neut en Drs. B. J. Westerhof, de vertegenwoordigers van Liwenagel Dr. Th. J. Korthagen en de redactie van Euclides, G. Krooshof en A. M. Koldijk en de sprekers Prof. Dr. N. G. de Bruyn en Drs. R. Sattler.

In augustus 1968 zijn we begonnen met de gemoderniseerde wiskunde in de brugklassen; we bevinden ons daardoor in een situatie, die ons voor vele problemen stelt ten aanzien van de didaktiek, maar die ons ook de mogelijkheid biedt de wiskunde op totaal andere wijze te doceren. Eén der moeilijkheden is het ontbreken van op lange ervaring gebaseerde leerboeken.

In de laatste vier maanden is op vele scholen reeds duidelijk gebleken, dat de sterke divergentie in de aanleg van de leerlingen, vertragend werkt op het tempo, terwijl het peil in het algemeen genomen, belangrijk daalt. Dit is een duidelijke aanwijzing, dat het voor het behoud van het HAVO een dringende eis is, dat daar vanaf de tweede klasse reeds de mogelijkheid bestaat tot een splitsing, die is gebaseerd op de prestaties in de exacte vakken.

In de onlangs gepubliceerde voorbeeldtabellen voor de categoriale scholen V.W.O. valt het op, dat de uren, die aan Wiskunde I en II worden toegewezen voor het Gymnasium 26, 27 of 28 bedragen, terwijl het Atheneum voor de Wiskunde I en II 28, 29 of 30 uren kan besteden. Omdat de examens voor beide afdelingen voor de wiskunde gelijkluidend zijn, moeten we iedereen, die invloed kan uitoefenen op de samenstelling van de lestabellen ten sterkste aanraden, te streven naar het getal 28 voor het Gymnasium. Bij de natuurwetenschappen doet zich een daarmee vergelijkbare situatie voor. Gelukkig zijn we niet verplicht deze voorbeeldtabellen te realiseren, daar er diverse onjuistheden en tegenstrijdigheden in aan te wijzen zijn.

Als in de afdeling B van het Gymnasium zoveel uren aan de klassieke talen worden besteed, dat dit ten koste van de wis- en natuur-

kundige vakken gaat, dan vrezen we, dat het voortbestaan van deze afdeling gevaar loopt.

Op vragen door enkele leden in de vorige algemene ledenvergadering gesteld betreffende toelating van MAVO-docenten tot onze vereniging heb ik toen geantwoord, dat het bestuur geen plannen in deze richting had. Zoals U echter uit enkele van onze publikaties heeft kunnen opmerken zijn wij hierin radicaal van gedachten veranderd. Omdat van verschillende zijden nadien weer gewezen is op het belang van deze integratie hebben wij na diverse besprekingen o.a. met vertegenwoordigers van het MAVO besloten een commissie te vormen, die tot taak heeft gekregen een zodanige wijziging van statuten en huishoudelijk reglement voor te stellen, dat ook de MAVO-docenten lid kunnen worden. Door het instellen van z.g. sectiecommissies wil men bereiken, dat de V.W.O.-docenten, de HAVO-docenten en de MAVO-docenten als groep een zekere zelfstandigheid verkrijgen. De genoemde commissie werd gevormd door de vertegenwoordigers van het MAVO de heren den Otter en Muskens, ons bestuurlid van Dormolen en mijzelf.

Zoals U uit de U toegezonden bescheiden heeft kunnen lezen is ook een voorstel tot naamsverandering van de vereniging gedaan. De huidige naam is door het verdwijnen van de mechanica als zelfstandig vak niet meer van toepassing. De naam kosmografie zal over enkele jaren eenzelfde lot ondergaan. Als dit voorstel aangenomen wordt zal de vereniging voortaan de naam van een van Nederlands grootste mathematici L. E. J. Brouwer mogen dragen.

Het mathematisch centrum heeft het afgelopen jaar weer de organisatie van de vakantiecursussen voor leraren op zich genomen. Op 13, 14 en 15 augustus 1968 is deze cursus zowel in Eindhoven als in Amsterdam gehouden. Deze jaarlijkse activiteit van het M.C. wordt door ons bijzonder op prijs gesteld. Ook het colloquium over besliskunde, gehouden in Amsterdam verdient grote waardering.

Door een samenloop van omstandigheden is de geplande excursie naar T.N.O. te Rijswijk niet doorgegaan. Er is echter toegezegd, dat we in de herfstvakantie van volgend jaar kunnen rekenen op een bezoek aan T.N.O.

De cursussen voor leraren, georganiseerd door de C.M.L.W., trekken ieder jaar grote belangstelling. De thans ingeslagen weg wordt door vele docenten als juist beschouwd. Vanzelfsprekend zijn we de C.M.L.W. erkentelijk voor haar activiteiten. Ook de cursussen, die aan de MAVO-docenten worden gegeven en die uitgaan van de Commissie, trekken een zeer groot publiek. Van deze cursussen gaat een goede invloed uit. De drie pedagogische centra en de C.M.L.W.

organiseren in onderlinge samenwerking gespreksgroepen voor MAVO-leraren. Deze samenkomsten zijn ongetwijfeld belangrijk.

Het bekende tijdschrift *Pythagoras,* dat thans bezig is met zijn 8e jaargang (in mijn openingsrede van vorig jaar sprak ik abusievelijk van 6e jaargang) verkeert nog steeds in blakende welstand en verschijnt nu ook in het Engels.

Het 17e congres van leraren is dit jaar op 16 april in Utrecht gehouden. Het thema luidde: *Uitdaging in Wetenschap en Onderwijs.*

De organisatie van de leesportefeuille is nog steeds in handen van de heer Boost, die we zeer dankbaar zijn voor het werk, dat hij hiervoor doet. Wij maken onze leden nogmaals uitdrukkelijk attent op het bestaan van deze instelling. Ook komt dank toe aan de redactie van Euclides, in het bijzonder aan de thans scheidende voorzitter de heer Wansink. Als de statutenwijzigingen door de vergadering worden aangenomen, dan betekent dit ook een belangrijke wijziging in ons orgaan.

Wij nemen vandaag afscheid van ons bestuurslid de heer Alders. Nu hij de pensioengerechtigde leeftijd bereikt heeft (U ziet het hem niet aan) meent hij geen bestuurslid van onze vereniging meer te moeten blijven. Hoewel we het met dit argument niet geheel eens zijn, moeten we zijn beslissing respecteren. Ik wil hem hier graag dank brengen voor het vele werk, dat hij als bestuurslid heeft gedaan. We danken hem in het bijzonder voor de goede en prettige wijze, waarop wij met hem hebben kunnen samenwerken. Zelf ben ik hem dankbaar voor de morele steun, die hij mij bij mijn werk als voorzitter heeft gegeven. We hopen dat we hem nog vaak in en om ons werk zullen ontmoeten en dat Wimecos, ook als hij de naam L. E. J. Brouwer krijgt, zijn grote belangstelling mag blijven behouden.

Thans verklaar ik de algemene ledenvergadering voor geopend.

NICO

Nu in België het nieuwe programma is ingevoerd in de zesde klas en, net als in ons land, elk jaar in een volgende klas geïntroduceerd zal worden, heeft men het wenselijk geoordeeld een tijdschrift in het leven te roepen, dat speciaal gewijd is aan de didactiek van de moderne wiskunde. Hoofdredacteuren zijn Papy en Holvoet. Het eerste nummer is dezer dagen verschenen.

De titel vereist enige toelichting. Veel baanbrekend werk bij het tot stand komen van de moderne opvattingen in de wiskunde is verricht door de groep Franse wiskundigen Nicolas Bourbaki. Omdat men zich met deze groep verwant voelt, heeft men als titel voor het tijdschrift het verkleinwoord van de voornaam van deze groep gekozen, dus Nico.

In dit eerste nummer vindt men o.a. een uitvoerig artikel van Papy, waarin hij slordig taalgebruik en het voorkomen van onnodige wiskundige fouten hekelt in een onlangs verschenen Belgisch schoolboek.

Arlon 10, de tiende serie studiedagen in Aarlen, komen ter sprake. De voordracht, die daar gehouden is door Prof. Dr. Louis Bouckaert uit Leuven, is opgenomen. In deze voordracht zet Bouckaert uiteen, op welke wijze de moderne methoden een vereenvoudiging in de opbouw van de wiskunde teweegbrengen.

Daarna komt de statistiek aan de orde. Door de universitaire commissie is een lijst opgemaakt van statistische begrippen, die in het middelbaar onderwijs behandeld zouden moeten worden. Deze lijst begint met enige begrippen uit de beschrijvende statistiek. In een zeer lezenswaard artikel zet Prof. H. Breny uit Luik uiteen, hoe men begrippen als frekwentieverdeling, cumulatieve frekwentie, gemiddelde, standaardafwijking kan bespreken zo, dat het belang ervan duidelijk wordt en dat hun mathematische strekking tot zijn recht komt. Centraal stelt hij daarbij het verkrijgen van inzicht in de betekenis van deze begrippen; technisch handig rekenwerk wordt niet geoefend.

R. Verhulst uit Antwerpen schrijft een korte didactische beschouwing over de distributieve eigenschap.

Ten slotte vindt men nog een serie examenopgaven van Frédérique over groepentheorie (Frédérique = Mevrouw Papy). En nog enkele wiskundige opgaven en aardigheden.

Het tijdschrift zal verschijnen in drie afleveringen per jaar van elk minstens 50 bladzijden. De omvang van het eerste nummer bedraagt 72 blz. De abonnementsprijs is 3 dollar.

Ik wens Nico van harte een goede toekomst toe.

P. G. J. Vredenduin

COMPUTERKUNDE OF COMPUTERWISKUNDE?

Als reactie op het stuk „Computers en het Middelbaar Onderwijs" van J. G. A. Haubrich en G. A. Vonk[1]) wil ik graag enkele overwegingen, zoals ik die als lid van de Commissie-De Bruyn in de commissie beluisterd (en geventileerd) heb, wat nader uiteenzetten, aangezien het rapport, vooral wat zijn considerans betreft, wat beknopt is uitgevallen. Overigens schrijf ik deze reactie niet namens voornoemde commissie.

Als voornaamste aanleiding voor het computer onderwijs, en als dwingende reden om dat aan alle middelbare scholieren te geven werden de in 1.1 en 1.2 genoemde argumenten beschouwd: de verandering van het aangezicht van de wereld door de ontwikkeling van het computergebruik, met daaraan tweeërlei aspect:

a) vrijwel iedereen zal in de werksituatie in meerdere of mindere mate met computers te maken krijgen

b) iedereen zal in zijn privé-leven in steeds meerdere mate met computers te maken krijgen.

Reeds nu is het zo dat wanneer een „autoriteit" meedeelt dat de computer het een of ander heeft ontdekt of beslist, dit door een grote menigte voor zoete koek wordt geslikt. Niet zo erg goede lesroosters worden zonder kritiek aanvaard wanneer ze door een computer gemaakt zijn. In een steeds verder gecomputeriseerde maatschappij is de vorming van een big-brother-achtige kliek, die de samenleving m.b.v. computers terroriseert, denkbaar.

Daarom is het noodzakelijk in brede kring het besef ingang te doen vinden dat een computer niets zelf doet, maar dat de mens dingen doet m.b.v. een computer, en enig begrip te kweken voor wat een mens dan wel met een computer kan doen en hoe hij dat doet.

Daarom ook stelt de commissie algoritmiek centraal:
laat zien wat men allemaal aan een probleem moet doen voordat het de computer in kan; hoe het de mens is die van tevoren beslist hoe de computer in allerlei situaties moet handelen.

Om dit zo concreet mogelijk over het voetlicht te brengen wordt dan ook het zelf gebruiken van een computer door de leerlingen m.b.v. een eenvoudige programmeertaal voorgesteld, en acht de commissie een elementaire programmeercursus daarom onvermijde-

---

[1]) Euclides, **44**, V. p. 154.

lijk. De gedachte, dit als een soort beroepsopleiding te zien, heeft dan ook bepaald niet voorgezeten.

In dit licht bezien is een overzicht van structuur, opbouw en werking van een computer bepaald als secundair te beschouwen. Wil men boven de tijd, benodigd om het primaire doel te bereiken, ook voor deze zaken nog tijd beschikbaar stellen, dan heb ik daar vrede mee. Bepaald aanvechtbaar vind ik echter de mening van de heren Haubrich en Vonk dat interesse voor wat men met een computer kan doen en vooral hoe men het doet, pas gewekt wordt als inzicht in de werking van de computer is verkregen, alsmede dat dan pas de algoritmiek meer plausibel zou worden.

Om met het laatste te beginnen: men kan rustig stellen dat de overgrote meerderheid der computergebruikers niet het geringste idee heeft hoe een computer nu eigenlijk werkt.

In de tweede plaats: het is echt niet zo eenvoudig iemand enig werkelijk begrip voor de werking van een computer bij te brengen. Veelal volstaat men met enige verhandelingen over het tweetallig stelsel en magnetiseerbare ringetjes, maar naar mijn mening heeft de toehoorder dan nog niet eens de bel horen luiden. Hetgeen niet wegneemt dat hij dan veelal wel tevreden is. Is een kinderhand in dit opzicht ook gauw gevuld? Werkelijk inzicht geven vereist een hogelijk technisch verhaal, dat de kinderen (afgezien natuurlijk van de happy few) eerder zal afstoten dan aantrekken.

Men zou overigens nog kunnen overwegen een film over de hardware te laten maken.

Een inleiding tot de gebruiksmogelijkheden van de computer stond de commissie, in het kader van de algoritmiek, bepaald voor ogen. Anderzijds zou het een wenselijke zaak zijn wanneer ook bijv. de leraren in de handelswetenschappen, de natuurkunde, de scheikunde (ja, welk vak eigenlijk niet?) in hun lessen aandacht aan het fenomeen computer gaven, waardoor de taak van de docent in de computer wiskunde tot de meer centrale zaken beperkt zou kunnen blijven.

Vandaar ook dat er gesproken wordt over computer *wis*kunde. Alhoewel dit ongetwijfeld een controversieel punt is, waarover verhitte discussies mogelijk zijn, was de commissie toch van mening, dat algoritmiek in laatste instantie een discipline in de logica en als zodanig in de wiskunde is.

Prof. Dr. A. van der Sluis

KORREL CXLVIII

De vergelijking $x^2 = 2$ in het brugjaar

De cursus voor wiskundeleraren, georganiseerd door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, was in 1968 te Groningen gewijd aan de didactiek van de leer van de reële getallen.

Tijdens de discussie in een der groepen kwam als didactisch principe ter sprake, dat leerlingen vroegtijdig ervaringen kunnen opdoen die hen in een later stadium in staat stellen inzicht te verkrijgen in de structuur van de verzameling van de reële getallen.

Een der deelnemers noemde als voorbeeld het aan de orde stellen van de vergelijking $x^2 = 2$ in het brugjaar. Wanneer de leerlingen voor het eerst met vergelijkingen hebben kennis gemaakt en met de rol van de variable daarin, kan men allerlei vergelijkingen aanbieden, die door „raden" kunnen worden opgelost. Ook is het mogelijk leerlingen zelf vergelijkingen te laten bedenken. In dat geval kan men ervaren dat ze, omdat ze niet zoals wij zoeken naar mooi uitkomende sommetjes, met voorbeelden komen opdraven die de moeite van het bekijken waard zijn.

Een der gevaren waaraan de docent dan bloot staat is dat hij te snel komt met een vaktaal die overbodig is. Wie bijvoorbeeld bij het opduiken van de vergelijking $x^2 = 2$ dadelijk gaat vertellen dat het getal dat deze bewering waar maakt wortel 2 genoemd wordt, voert daarmee voortijdig een begrip in dat nog niet aan de orde is en dat onvoldoende is voorbereid.

De leerlingen van het brugjaar zullen al vrij snel tot de conclusie komen dat bij iedere vergelijking vermeld moet worden over welke verzameling de variable gekozen mag worden. Ook dat wanneer $x \in N$ de oplossingsverzameling van deze vergelijking leeg is.

Misschien hebben ze al iets gehoord over de verzameling Q, maar ook als dat niet het geval is kan gezegd worden dat ze mogen proberen of ze voor x een breuk kunnen vinden die de open bewering tot een ware maakt. De leraar die het voorbeeld noemde, vertelde dat hij met zijn leerlingen „plus- en minschoten" op het doel had gelost en dat ze op deze manier getallen als 1,4 hadden gevonden die te klein waren en eveneens getallen als 1,5 die te groot waren.

Tijdens de groepsbespreking kwam men tot de conclusie dat het daarbij moest blijven. Nu al praten over het wel of niet bestaan van een getal, dat aan de vergelijking voldoet, of over de naam van zo'n getal werd voorbarig geacht. Meer dan een experiment (om het denken in gang te zetten) zou men er niet in moeten zien. Maar zo'n experiment werd toch wel waardevol geacht: de leerlingen hadden zicht gekregen op een probleem dat voorlopig wel probleem zou blijven; ze hadden kennis gemaakt met de wiskunde als een vak

waarin door proberen en benaderen een probleem werd aangepakt; bij een aantal van hen zal iets zijn begrepen van de methode die ze later als Snede van Dedekind of als de methode van de intervalnesten zullen leren kennen.

We moeten de moed hebben, zo werd gesteld, om zo'n experiment aan de orde te stellen, maar ook om het weer tijdig af te breken om over te gaan tot het gewone programma. Het onderbreken van het gewone programma met een dergelijk experiment geeft kleur aan het werk, maar in het bijzonder richt het het denken van de leerling op komende denkwijzen en zorgt het voor de noodzakelijke ervaringen.

Groningen G. Krooshof

VAN DE REDACTIE

1. In het vorige nummer konden we reeds het berichtje plaatsen: de vereniging *Wimecos* heeft haar poorten open gezet voor wiskunde leraren van de mavo- en andere scholen. De naam is gewijzigd in *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.*
   Wij roepen de nieuwe leden en lezers — wij hopen dat er spoedig vele zullen zijn — gaarne een hartelijk welkom toe.
2. Het invoeren in de scholen van allerlei moderne wiskundige onderwerpen dwingt ons ertoe meer aandacht te besteden aan op de lespraktijk gerichte artikelen; ook aan bijdragen over de aard van de moderne wiskunde. Wij willen gaarne ons best doen, maar vragen de hulp van die lezers die ons kunnen steunen.
3. Of een en ander zal leiden tot het instellen van nieuwe rubrieken, daarover kunnen we ons nog niet uitlaten. Zijn er bepaalde wensen, laat u ze ons dan weten. Hebt u vragen over de leerstof, over de manier waarop die gebracht kan worden, over alles wat maar met wiskunde onderwijs te maken heeft, wilt u ze ons dan toesturen? Wij zullen dan zeker antwoorden, schriftelijk en als er aanleiding toe is in de vorm van een artikeltje of door simpele vermelding in het blad.
4. Ook in de redactie zijn er wijzigingen. Behalve van voorzitter Wansink, moesten we afscheid nemen van Drs. H. W. Lenstra die al vijf jaren niet meer het Middelbaar onderwijs dient en reeds lang meende dat hij daarom geen redactielid zou kunnen blijven. Wij hebben zijn uittreden telkenjare kunnen uitstellen en daardoor nog lang van zijn ervaring en kundige adviezen kunnen profiteren. Lenstra heeft 12½ jaar deel van de redactie uitgemaakt, waarvan enkele jaren als secretaris. Voor zijn werk willen wij hem hier gaarne onze dank en erkentelijkheid betuigen.

5. Als nieuwe redactieleden mogen we welkom heten de heren Drs. J. van Lint, leraar aan de Rijksscholengemeenschap te Zwolle en F. Goffree, leraar aan de Rijksopleidingsschool voor onderwijzers te Hengelo (O) en medewerker bij de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. Wij zijn verheugd dat zij zich bereid getoond hebben om de open gevallen plaatsen te bezetten en roepen hen een hartelijk welkom toe.
6. Het ligt in de bedoeling om de redactie uit te breiden met leden uit de mavosector. Op dit ogenblik kunnen wij echter nog geen namen noemen.
7. Het adres van de voorzitter van de redactie is gewijzigd: bijdragen voor het blad worden daarom voortaan gaarne ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen.

BOEKBESPREKING

Joseph E. Hofmann, *Michael Stifel* (1487?–1567), Sudhoffs Archiv, Beiheft 9, Franz Steiner Verlag GMBH, Wiesbaden, 1968, 50 blz., brosch. DM 14.—.

Het boekje verplaatst ons terug in een tijd, waarin de algebra in zijn kinderschoenen stond. Men begon bij het oplossen van vergelijkingen de onbekende door een letter voor te stellen, het tekenschrift ontwikkelde zich, in deze tijd werden voor het eerst de tekens + en — gebruikt. Stifel is een van de eersten, die een helder inzicht heeft in de betekenis van de negatieve getallen (die hij weliswaar nog wel absurdi noemde). Hij begreep de betekenis van machtverheffen met gehele negatieve exponenten. Hij was de eerste, die een algemene methode vond voor het oplossen van vierkantsvergelijkingen. Hij schreef ze in de vorm $x^2 = px + q$ (uiteraard nog niet op deze manier geformuleerd), waarin p en q willekeurige getallen zijn, die dus zowel positief als negatief kunnen zijn. Te voren onderscheidde men steeds verschillende gevallen, b.v. $x^2 = px + q$, $x^2 + px = q$, $x^2 + q = px$, waarin p en q niet negatief kunnen zijn.

Stifel was ook een meester in het jongleren met getallen. Driehoek van Pascal, rekenkundige rijen van hogere orde, magische kwadraten werden door hem onderzocht. In de rubriek Recreatie vindt u een variant op een door Stifel gevonden magisch kwadraat. P. G. J. Vredenduin

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

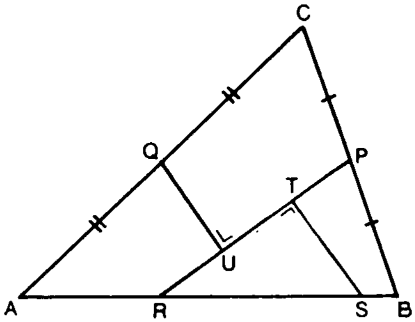
212. Ontwerp een magisch kwadraat van 16^2 getallen (1 tot en met 256). Dit kwadraat moet aan de eis voldoen, dat weer een magisch kwadraat ontstaat, met 14^2 getallen (niet de getallen 1 tot en met 196), als men de buitenste getallen weglaat. Laat men weer de buitenste getallen weg, dan moet een magisch kwadraat met 12^2 getallen ontstaan, enz., totdat men uiteindelijk een magisch kwadraat met 16 getallen overhoudt. (naar Michael Stifel, vgl. de boekbespreking in dit nummer)

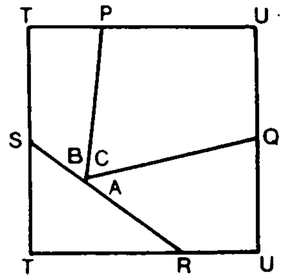
213. De som van twee getallen is een 7-voud + 1 en het verschil een 7-voud + 2. Een van de getallen is 1 minder dan het dubbele van het andere. Hun produkt heeft vier cijfers en eindigt op een 1. Welk gegeven is overbodig?

(H. Cohen, Israel)

OPLOSSINGEN

210. Zie voor de opgave het vorige nummer.





Bewijs. Stel, dat de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan p^2. Dan is $PR = p$. We moeten nu bewijzen:

$$ST = \tfrac{1}{2}p, \quad QU = \tfrac{1}{2}p, \quad TP = RU.$$

Omdat $RS = \frac{1}{2}AB$, is $RSPQ$ een parallellogram. Hieruit volgt, dat $TP = RU$. En verder $QU = ST$. Omdat de oppervlakte van $RSPQ$ gelijk is aan de helft van de opppervlakte van driehoek ABC, is dan $QU = ST = \frac{1}{2}p$.

(Niet bij elke driehoek vindt men langs deze weg een oplossing.)

211. Gevraagd wordt het kleinste getal met de eigenschap, dat men het derde deel krijgt voor de voorste twee cijfers achteraan te plaatsen.

We kunnen het getal en het derde deel resp. schrijven:

$$q \cdot 10^n + p \text{ en } 100p + q.$$

Er moet dus voldaan worden aan de eis:

$$\begin{aligned} 3\,(100p + q) &= q \cdot 10^n + p, \\ 299p &= q\,(10^n - 3), \\ 13 \cdot 23p &= q\,(10^n - 3). \end{aligned}$$

Er zijn nu drie mogelijkheden:

a. $10^n - 3$ is deelbaar door 13 en door 23,
b. q is deelbaar door 13 en dus $q = 39, 52, 65, 78$ of 91,
c. q is deelbaar door 23 en dus $q = 46, 69$ of 92.

Onderstel $q = 39$. Schrijf op 39. Deel 39 door 3; men krijgt 13. Schrijf onder de 39 de cijfers 13. Schrijf nu ook 13 achter 39; deel deze 13 door 3. Men krijgt 04. Ga zo door en men krijgt vanzelf de getallen, die in de opgave vermeld waren.

Men kan zo de verschillende mogelijkheden aftasten. Dan blijkt $q = 46$ te leveren:

461538
153846.

Dit is de gevraagde oplossing.